FONDATION LETTRES & SCIENCES

ÉCOLE PROFESSORALE DE PARIS

Séminaire
« Quel enseignement secondaire pour le XXI^{e} siècle ?

L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

par Laurent LAFFORGUE

SOMMAIRE

LES MATHÉMATIQUES AU COLLÈGE ET AU LYCÉE : PRINCIPES ET IDÉES POUR L'ÉLABORATION DE POSSIBLES PROGRAMMES

par Laurent LAFFORGUE[1]

I. Remarques préliminaires

1) Les mathématiques ne sont pas la discipline la plus importante. La discipline la plus importante est l'apprentissage de la langue, c'est-à-dire, dans notre pays, du français.

2) Les mathématiques consistent en grande partie en une forme particulière d'usage du langage. Elles sont donc complètement tributaires de la discipline d'apprentissage et de maîtrise de la langue. La particularité linguistique qui définit les mathématiques est que les mots n'y désignent pas les choses, comme dans le langage courant et même dans les sciences de la nature, mais les contiennent. Est mathématique un objet de pensée qu'il est possible non seulement d'évoquer ou de désigner mais de cerner totalement par les mots. Est mathématique une narration dont toutes les étapes peuvent être totalement explicitées par les mots.

Les mathématiques supposent donc une très bonne maîtrise de la langue, aussi bien du vocabulaire – qu'il faut s'habituer à connaître et utiliser avec précision – que de la grammaire.

---

[1] Membre de l'Institut, Médaille Fields de Mathématiques, Professeur à l'Institut des Hautes études scientifiques (IHES).

3) La connaissance et la maîtrise de la grammaire sont particulièrement importantes, car les mathématiques consistent en un usage réfléchi, donc distancé, du langage. Cet usage réfléchi se distingue de l'usage spontané du langage qui est le nôtre dans les conversations. Le rapport réfléchi au langage s'appelle la grammaire.

La forme de langage la plus éloignée de l'usage courant à laquelle recourent les mathématiques est le langage symbolique.

Il fait partie de l'apprentissage des mathématiques de s'habituer progressivement à désigner divers objets par des lettres, à raisonner sur ces lettres et à calculer sur des lettres quand elles désignent des nombres génériques, non spécifiés.

À partir du moment où l'on comprend qu'il y a une infinité de nombres entiers s'ouvre la possibilité de considérer des lettres indexées par un entier n générique et qui désignent donc des nombres ou plus généralement des objets en quantité infinie. Ainsi, le langage symbolique ouvre la possibilité de raisonner ou de calculer sur des objets en quantité infinie.

Cette possibilité suppose une relation au langage qui soit raisonnée, réfléchie et distancée.

4) Une telle relation au langage raisonnée, réfléchie et distancée est impossible sans un long apprentissage de la grammaire.

Elle est très facilitée par l'apprentissage d'au moins une langue classique telle que le latin ou le grec. On a pu penser que si l'écriture symbolique s'est développée en Europe à partir du XVI^{e} ou du XVII^{e} siècle d'une façon qu'elle n'avait connue nulle part ailleurs auparavant – même pas en Grèce –, c'est justement grâce à l'éducation au latin et par le latin qui était dispensée : du fait que le latin était une langue morte, le rapport au latin de ceux qui l'apprenaient était un rapport abstrait.

5) L'usage de l'écriture symbolique en mathématiques ne doit cependant pas dissimuler le fait qu'un texte mathématique reste composé de phrases.

Même un calcul symbolique doit être présenté par une ou plusieurs phrases qui précisent le sens de tous les symboles employés et qui décrit ce que l'on fait. Tout texte mathématique, quelle que soit sa longueur, est une rédaction et doit être évalué comme une rédaction.

Le type d'exercice ou de problème mathématique qui doit être proposé aux élèves à tous les niveaux, quel que soit le degré de simplicité ou de progressive sophistication des mathématiques étudiées, est le suivant : la présentation des éléments du problème est suivie d'une seule question qu'il s'agit de résoudre en plusieurs étapes à trouver et à rédiger soi-même. Comme il y a plusieurs étapes, la rédaction est un récit qu'il s'agit de rédiger de la manière la plus claire possible. C'est comme une lettre que l'on écrit à quelqu'un pour lui raconter un événement ou une histoire dont il n'a pas été témoin. Pour que cette personne comprenne le récit, il faut n'oublier aucun élément nécessaire et raconter les choses avec ordre.

Il est bon de dire et répéter aux élèves qu'ils doivent rédiger dans l'idée de se faire comprendre non pas par le professeur qui connaît ce dont ils parlent, mais par une personne qui n'en connaîtrait rien et à qui il serait nécessaire de tout expliquer de la manière la plus claire et la plus ordonnée possible de façon à être compris. Ils doivent en particulier se demander constamment s'ils comprendraient ce qu'ils écrivent si cela leur était envoyé par un autre élève sans qu'eux-mêmes aient connaissance de ce dont il s'agit.

Une rédaction mathématique doit être gouvernée par le souci de la clarté, donc, en particulier, par celui de ne pas laisser d'ambiguïté. On a dit plus haut qu'est mathématique ce qu'il est possible de saisir ou d'expliciter entièrement par les mots. Cela implique que les objets mathématiques sont abstraits. Comme ils sont abstraits, ils se prêtent aux ambiguïtés et échappent à la compréhension si les mots employés ne les saisissent pas avec suffisamment de précision, c'est-à-dire, concrètement, si la rédaction ne dit pas tout ce qui est nécessaire pour les saisir, eux et leurs relations mutuelles qui forment le tissu des raisonnements. Une rédaction mathématique claire est donc nécessairement rigoureuse : elle n'oublie rien de ce qu'il faut dire pour qu'une définition ou un raisonnement soient complets.

Quand un raisonnement rédigé est complet au sens qu'il ne laisse plus rien passer au travers de ses mailles, il s'appelle une démonstration. L'apprentissage de l'art des démonstrations rédigées, en commençant par les plus élémentaires et en allant très progressivement vers plus de complexité, est une part essentielle de l'apprentissage des mathématiques.

6) L'apprentissage de la rédaction mathématique est long. Il se réalise par la pratique, convenablement corrigée par le professeur, mais aussi et d'abord par l'exemple. Les professeurs doivent donc avoir un très grand souci de la bonne rédaction de leur propre cours. Dès lors que leur cours est bien rédigé et peut servir de modèle, ils ne doivent pas hésiter à l'écrire entièrement au tableau pour que les élèves le recopient, ou à le dicter mot à mot, et ce jusqu'aux dernières classes du lycée.

Il est bon de demander aux élèves de connaître par cœur un certain nombre de définitions et d'énoncés du cours bien rédigés.

Il peut même être bon de demander aux élèves d'apprendre par cœur certaines démonstrations, tout particulièrement si elles sont d'abord difficiles pour eux. Il arrive que l'on comprenne seulement après avoir appris.

II. Quelques principes

Il existe *a priori* beaucoup de choix possibles pour les contenus d'un programme de mathématiques au collège et au lycée. Nous allons proposer quelques principes pour la conception d'un tel programme.

1) Un premier principe est qu'il vaut mieux approfondir un petit nombre de sujets en y passant autant de temps que nécessaire, plutôt que de survoler un grand nombre de sujets sans en approfondir aucun. Avoir appris un petit nombre de sujets de manière approfondie rendra plus facile d'acquérir ultérieurement d'autres connaissances qui s'avéreront nécessaires en fonction des études de chacun et du développement des différentes sciences ou techniques. Il est impossible de prétendre étudier à l'avance tout ce qui pourra se révéler utile plus tard. Même dans une perspective utilitariste, il est préférable pour un élève de bien approfondir un sujet riche qui s'avérera sans relation directe avec ce qu'il devra apprendre plus tard, que de survoler à la va-vite un domaine qui deviendra un jour utile pour lui. Dans le premier cas, en effet, le fait d'avoir approfondi un sujet aura rendu possible d'en apprendre et approfondir beaucoup d'autres, alors que, dans l'autre cas, l'élève croira connaître alors qu'il ne connaîtra pas et qu'il n'aura pas appris à étudier vraiment et il ne saura même pas ce que signifie le verbe approfondir.

2) Un second principe de conception de programmes est qu'il est préférable de choisir des sujets d'étude mathématique qui soient fondamentaux, au sens qu'ils consistent à expliciter et développer des intuitions fondamentales de l'esprit humain, présentes chez tout homme avant même et sans même qu'il étudie les mathématiques.

De telles intuitions fondamentales sont effectivement à la racine des trois grandes parties des mathématiques que sont l'arithmétique, la géométrie et l'analyse.

Compter (1, 2, 3, 4, ... plus le 0) est naturel à l'esprit humain, ainsi qu'additionner, multiplier, soustraire et même diviser. C'est la racine de l'arithmétique.

L'intuition de l'espace, la reconnaissance de figures simples et le sens des symétries de ces figures sont également naturelles à l'esprit humain. C'est la racine de la géométrie.

Les figures géométriques se prêtent à diverses mesures de grandeur, en particulier de longueur, de surface et de volume. Ces mesures effectuées concrètement prennent la forme de nombres plus généraux que les nombres entiers et dont chacun comprend qu'ils ne représentent presque jamais des valeurs exactes mais des valeurs approchées. C'est la racine de la science des valeurs approchées, qui est l'analyse.

3) Un troisième principe est qu'il est préférable que le cours ait des directions et des buts précis et clairs, que les élèves puissent comprendre, de façon que le contenu du cours leur apparaisse plein de sens et non pas absurde.

L'application concrète de ce principe signifie que le cours peut se donner pour but explicite de résoudre quelques grands problèmes ou classes de problèmes, en construisant progressivement tous les outils nécessaires. Il ne faut pas s'étonner que l'élaboration des outils nécessaires à la résolution de quelques questions ou classes de questions puissent occuper une ou plusieurs années de cours. Voir qu'il peut en être ainsi est un enseignement en soi.

Une autre possibilité est que le cours se donne pour but d'étudier de manière systématique un thème précis.

L'apprentissage des mathématiques est un apprentissage de l'esprit de méthode. Or l'un des traits essentiels de toute étude méthodique est son caractère systématique : on cherche à ne rien oublier, en procédant par ordre, du plus simple vers le plus élaboré. Faire l'expérience d'une ou plusieurs applications de l'esprit de méthode et en particulier de son caractère systématique est aussi un enseignement en soi.

4) Un quatrième principe de l'enseignement des mathématiques est que, pour chaque nouvel élément introduit dans le cours, il faut l'expliquer de plusieurs manières différentes et le relier à ce qui a déjà été appris par le plus grand nombre de liens possible.

Comprendre les choses, c'est saisir leurs relations mutuelles et avoir sur elles une multiplicité de points de vue. Plus les professeurs seront en mesure de donner aux élèves une multiplicité de points de vue différents et de tisser devant leurs yeux un tissu serré de relations entre les éléments du cours, plus ils faciliteront et approfondiront leur compréhension et leur saisie de ces choses.

Il est particulièrement important, pour chaque élément nouveau que l'on introduit, de donner sur lui plusieurs points de vue différents qui se situent à différents niveaux d'abstraction, quitte à ce que leurs niveaux de généralité ne soient pas identiques. C'est d'autant plus important que le niveau d'abstraction le plus accessible par un élève n'est pas le même suivant les élèves. Le plus concret n'est pas nécessairement le plus facile, en tout cas certainement pas pour tous les élèves.

5) Un cinquième principe de l'enseignement, rendu particulièrement nécessaire par l'application du principe précédent, est que les professeurs doivent approfondir d'abord pour eux-mêmes la connaissance des sujets qu'ils ont charge d'enseigner, sans jamais se satisfaire de ce qu'ils connaissent déjà. Ils ne doivent pas se lasser de rechercher de nouveaux points de vue sur les domaines ou questions qui sont l'objet de leur enseignement, et de nouvelles manières de présenter et expliquer ces domaines et leurs éléments.

Aujourd'hui, on peut trouver beaucoup de choses sur Internet, à la condition, bien sûr, de vérifier complètement tout ce que l'on lit. Il est plus que recommandé de rechercher et lire des bons livres ayant trait aux domaines de l'enseignement, sans du tout se contenter des manuels scolaires disponibles. Il va de soi qu'il faut vérifier aussi ce que l'on lit même dans les meilleurs livres : il est rare qu'un livre ne contienne pas d'erreur. Même s'agissant des domaines relativement élémentaires qui peuvent faire l'objet d'un enseignement au collège et au lycée, il est particulièrement recommandé de rechercher et de lire des livres ayant trait à ces domaines écrits par des mathématiciens professionnels, voire par de grands mathématiciens. Ces livres seront le plus souvent d'un niveau très supérieur à ce qui peut être enseigné au collège et au lycée mais il est effectivement nécessaire aux professeurs, pour bien enseigner, de maîtriser les domaines de leur enseignement à un niveau largement supérieur à celui de leurs cours.

III. Quelques conseils de lecture pour les professeurs

En application du dernier principe énoncé ci-dessus, voici quelques conseils de lecture pour les professeurs. La liste proposée n'est évidemment pas exhaustive.

1) Pour l'arithmétique on peut recommander en particulier :

- André Weil, *Number theory : An approach through history, from Hammurapi to Legendre* (en se fixant pour but de comprendre entièrement le contenu mathématique du livre)

- Jean-Pierre Serre : *Cours d'arithmétique*.

2) Pour la géométrie :

- Emil Artin, *Algèbre géométrique*.
- Marcel Berger, *Géométrie*.
- Évariste Galois, *Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux* (en se donnant pour but de comprendre entièrement ce texte elliptique et difficile à l'aide des commentaires que l'on peut facilement trouver sur Internet ainsi que de quelques-uns des innombrables livres ou cours sur la théorie de Galois, par exemple le livre de Ian Stewart, *Galois theory* qui traite la question des points constructibles à la règle et au compas.

3) Pour l'analyse :

- Jean Dieudonné, *Calcul infinitésimal*.

- Lev Landau et Evgueni Lifchitz, *Mécanique.*

- Richard Feymann, *Newton implique Kepler* (exposé disponible sur Internet, par exemple à l'adresse : http://journal.geometryexpressions.com/pdf/kep.pdf)

IV. Idées pour l'élaboration de possibles programmes de mathématiques

En application de ces principes, on peut proposer les sujets d'étude suivants :

1) Au collège :

– Pour l'arithmétique au collège, l'étude systématique de la division euclidienne d'un entier par un autre, avec comme conséquences l'unique décomposition de tout entier ou de toute fraction en produit de puissances de nombres premiers et l'existence et les propriétés des anneaux Z/dZ.

Le but du cours peut être d'étudier les équations polynomiales de degré 1 ou 2 à coefficients dans ces anneaux et particulièrement dans les corps Z/pZ. Cela conduit à la question de savoir quels éléments non nuls de Z/pZ sont des carrés.

– Pour la géométrie au collège, l'étude des procédés de construction de points du plan et donc de la droite et de l'espace, ainsi que celle des symétries (respectant les distances, c'est-à-dire les isométries) du plan et de l'espace.

On propose d'étudier quatre procédés de construction de points : à la règle, à la règle et à l'équerre, à la règle et au compas, et par approximations successives. L'autre but du cours serait de déterminer toutes les symétries du plan et de l'espace et d'étudier comment elles agissent concrètement par des constructions à la règle et à l'équerre.

– Pour l'analyse au collège, l'approximation des nombres réels par des suites de fractions, la notion de coordonnées numériques d'un point puis la définition par approximations successives des notions de longueur d'une courbe, d'aire d'une surface plane, de volume d'un corps spatial et d'aire de son bord, avec leurs propriétés d'invariance par isométries et d'homogénéité par dilatations.

La définition des longueurs des arcs de cercle permet d'introduire la notion de mesure des angles et donc les coordonnées polaires des points du plan et les coordonnées sphériques des points de l'espace (en faisant bien sûr le rapport avec les notions de longitude et de latitude). Le passage des coordonnées polaires ou sphériques aux coordonnées cartésiennes permet d'introduire les fonctions cosinus et sinus.

Le but du cours peut être de démontrer les formules de calcul des longueurs, aires et volumes des figures introduites dans la partie géométrique du cours, en particulier les formules pour l'aire d'un triangle, d'un disque ou d'une sphère, et pour le volume d'une pyramide, d'un cylindre ou d'une boule.

2) Au lycée

– L'arithmétique au lycée peut être consacrée à l'étude des formes quadratiques (c'est-à-dire des polynômes homogènes de degré 2 en plusieurs variables) à coefficients dans les fractions, dans les entiers et dans les Z/nZ.

Le but du cours peut être de démontrer, d'une part, que tout entier est somme de quatre carrés (mais pas de moins) et que les formes quadratiques à coefficients entiers satisfont le « principe de Hasse » (au moins dans le cas de trois variables) : elles ont une solution non triviale dans les entiers si et seulement si elles ont une solution non triviale dans les nombres réels et dans Z/dZ pour tout entier d.

– La géométrie au lycée peut être consacrée à l'étude algébrique des points du plan qui sont constructibles à la règle et au compas.

Cela exige de traduire les intersections de droites et de cercles en systèmes d'équations de degrés 1 ou 2, puis d'introduire progressivement les notions de corps engendré sur un autre par un élément algébrique, de degré d'une telle extension, donc d'espace vectoriel sur un corps et de dimension d'un tel espace vectoriel, de comportement des degrés des extensions dans des suites d'extensions emboîtées, de polynôme minimal d'un élément algébrique et pour cela de division euclidienne d'un polynôme par un autre.

Le but du cours pourrait être d'une part de démontrer que la duplication du cube, la trisection de l'angle et la quadrature du cercle sont impossibles et d'autre part de donner un critère nécessaire et suffisant pour que le polygone régulier à n côtés soit constructible à la règle et au compas.

– L'analyse au lycée peut être consacrée à donner un traitement mathématique complet et rigoureux de la démonstration des trois lois de Kepler (dans le cas, bien sûr, où on ne considère que deux corps célestes) à partir de la théorie de l'attraction universelle de Newton.

Cela suppose d'introduire le calcul différentiel – avec les notions de vitesse et d'accélération –, le calcul intégral et la relation qui les lie.

Les trajectoires possibles d'un corps céleste soumis à la loi de Newton sont planes et de trois types possibles : ellipse, hyperbole ou parabole. Ce sont les trois types possibles de coniques c'est-à-dire de courbes planes définies par des équations de degré 2.

On voit ainsi qu'un thème unificateur pour l'ensemble de cette esquisse de programme de mathématiques au collège et au lycée est celui des équations polynomiales de degré 2 en une ou plusieurs variables.

V. Une question qui se pose nécessairement

La question de la structure de l'enseignement des mathématiques et du nombre d'heures dévolu à cette discipline se pose nécessairement.

Dans l'état actuel des choses existe un tronc commun qui va de la sixième à la seconde, suivi de seulement deux années de filières différenciées, la première et la terminale. Le choix d'un tronc commun aussi long procède d'une volonté de normalisation qui, ignorant la grande variété des intelligences des élèves, aboutit inéluctablement à un nivellement par le bas.

Il serait bien préférable de limiter le tronc commun à la sixième et la cinquième puis, s'agissant des mathématiques, de disposer de deux options d'enseignement : l'une qui aille progressivement vers davantage d'abstraction, tout en procédant à de constants allers retours vers le concret, et l'autre qui, sans renoncer à introduire peu à peu des notions abstraites, privilégierait une approche de ces notions fondée sur des manipulations pratiques dans des situations tirées de la physique et de l'ingénierie élémentaires, voire du quotidien. La différence entre ces deux filières serait d'abord une différence d'accent – plus abstrait dans un cas, plus concret dans l'autre – et aussi une différence d'ambition du programme, donc de volume horaire.

Les idées d'éléments de programme proposées plus haut doivent en tout cas être considérées plutôt comme un cadre à l'intérieur duquel pourrait être opérée une sélection réaliste qui tienne compte des connaissances déjà acquises des élèves auxquels il s'agit d'enseigner, de leurs aptitudes et de leur goût pour les mathématiques et du nombre d'heures d'enseignement dont on dispose.

Il convient, plus que jamais, de répéter le principe que mieux vaut apprendre bien un petit nombre de sujets relativement élémentaires que d'apprendre mal, c'est-à-dire se donner la fausse illusion d'apprendre, des sujets trop nombreux ou trop élaborés pour pouvoir être étudiés efficacement par des élèves ayant un niveau insuffisant de connaissance ou de maturité. Dans tous les cas, il faut commencer par le plus simple et le maîtriser parfaitement avant d'aller plus loin.

L'esquisse de programme constituée de l'ensemble des idées proposées doit être vue comme un maximum réalisable seulement avec des élèves bénéficiant de bases très solides acquises dès l'école primaire non seulement en mathématiques mais aussi en français, particulièrement en grammaire et dans l'art de rédiger. Il faudrait encore que ces élèves aient le goût et les aptitudes très particuliers que demandent les mathématiques à partir d'un certain degré d'abstraction : manquer de ce goût ou de ces aptitudes est d'autant moins un défaut ou une honte qu'il existe bien d'autres formes d'intelligence. C'est bien pourquoi la mise en œuvre d'un programme de mathématiques aussi consistant que celui proposé ici requiert non seulement l'existence d'une filière spécialisée dans laquelle il serait enseigné mais aussi celle d'autres filières adaptées à d'autres formes d'intelligences mais tout aussi ambitieuses chacune à sa manière, et donc tout aussi prestigieuses.