Programme de l'examen d'entrée à l'École professorale de Paris
en Mathématiques (écrit et oral)

Raisonnement et vocabulaire ensembliste
Opérateurs logiques et quantificateurs. Vocabulaire de la théorie des ensembles. Applications, relations d'ordre et relations d'équivalence.

Nombres complexes
Module et argument. Racines n^{mes} de l'unité. Exponentielle complexe, trigonométrie. Application à la géométrie plane. Équation du second degré.

Fonctions de variable réelle
Continuité, théorème des valeurs intermédiaires. Dérivabilité, théorème de Rolle, inégalité des accroissements finis. Extension aux fonctions à valeurs complexes.

Calcul intégral et Équations différentielles
Intégrale d'une fonction continue sur un segment, sommes de Riemann. Calculs de primitive. Intégration par parties, changement de variable. Formule de Taylor avec reste intégral. Intégrales généralisées. Équations différentielles linéaires du premier ordre, du premier ordre à variables séparables, linéaires du second ordre à coefficients constants.

Nombres réels et suites réelles
Construction de $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Q}$. Présentation axiomatique de $\mathbf{R}$, bornes supérieure et inférieure. Valeurs approchées, nombres décimaux. Limite d'une suite réelle, théorèmes d'existence. Suites extraites. Extension aux suites à valeurs complexes. Séries numériques, séries à termes positifs, séries absolument convergentes, séries de références (séries géométriques, séries de Riemann).

Suites et séries de fonctions
Convergence simple, convergence uniforme. Théorèmes de régularité. Convergence normale des séries de fonctions. Rayon de convergence. Les théorèmes de régularité de la somme sont admis. Développement en séries entières des fonctions usuelles.

Analyse asymptotique
Relations de comparaisons des suites et des fonctions. Développements limités.

Algèbre linéaire
Systèmes linéaires, algorithme du pivot de Gauss-Jordan. Espaces vectoriels de dimension finie, familles libres, familles génératrices, bases. Applications linéaires. Homothéties, projections et symétries. Rang d'une application linéaire. Représentations matricielles d'un endomorphisme. Réduction des endomorphismes et des matrices carrées : éléments propres, diagonalisation, trigonalisation. Polynômes d'endomorphismes, polynôme minimal. Le théorème de Cayley-Hamilton est admis.

Matrices et déterminants.
Calcul matriciel, matrices inversibles, transposition. Matrices et applications linéaires, changements de base. Équivalence, similitude. Déterminant d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Dénombrement
Cardinal d'un ensemble fini, listes, combinaisons, factorielles, formule du binôme.

Arithmétique des entiers
Arithmétique des entiers : nombres premiers, PGCD, PPCM, algorithme d'Euclide. Sous-groupes de $\mathbf{Z}$ Congruences. Anneaux $\mathbf{Z}/n\,\mathbf{Z}$: théorème des restes chinois, unités, petit théorème de Fermat.

Polynômes
Arithmétique des polynômes à coefficients réels ou complexes. Racines. Décomposition dans $\mathbf{R}$ [X] et C[X] . Somme et produit des racines d'un polynôme.

Groupes
Sous-groupes, morphismes de groupes. Groupes monogènes et groupes cycliques : groupes $\mathbf{Z}/n\,\mathbf{Z}$, groupe des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité ; générateurs, indicatrice d'Euler. Théorème de structure des groupes monogènes et cycliques. Ordre d'un élément. Groupes symétriques. Exemples de groupes agissant sur un ensemble, exemples de groupes laissant invariante une partie du plan ou de l'espace.

Produit scalaire et espaces euclidiens
Produit scalaire sur un espace de dimension finie, norme associée, orthogonalité. Bases orthonormées. Projections orthogonales. Orientation. Groupes des isométries vectorielles d'un espace euclidien, des isométries affines d'un espace euclidien, des similitudes d'un espace euclidien. Isométries vectorielles d'un espace euclidien de dimension 2 ou 3. Isométries affines du plan euclidien.

Probabilités
Espaces probabilisés finis. Probabilités conditionnelles, conditionnement et indépendance. Variable aléatoires sur un univers fini : lois usuelles (lois uniformes, lois binomiales), variables aléatoires indépendantes, espérance, variance et écart-type. Variables aléatoires discrètes : espérance et variance, lois de Poisson, lois géométriques. Lois exponentielles, loi faible des grands nombres.

Calcul différentiel
Fonctions de 2 ou 3 variables réelles. Dérivées partielles d'ordre 1. Fonctions de classe $C1$.
Points critiques d'une fonction de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}$. Dérivées partielles d'ordre supérieur. Le théorème de Schwarz est admis. Extrema d'une fonction de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}$.

Topologie d'un espace vectoriel normé de dimension finie
Parties ouvertes, parties fermées. Adhérence, intérieur. Parties denses. Parties compactes, théorème de Bolzano-Weierstrass, théorème de Heine.