École professorale de Paris
Mathématiques
Année 2019-2020

INTRODUCTION A LA LOGIQUE

Cours de Laurent Lafforgue

Le but du cours est de préciser ce que l'on entend en mathématiques par le mot de "théorie" et de proposer une analyse générale de cette notion.

I. Analyse logique de quelques théories et résultats étudiés au collège ou au lycée

La première séance sera consacrée à l'analyse logique de quelques théories ou résultats simples et familiers à chacun. Elle dégagera dans chaque cas des éléments de langage permettant de nommer ce dont on parle, des procédés de construction de formules et d'objets définis par ces formules, des formules ou implications entre formules qui entrent dans la définition des théories dont on parle, et des procédés de déduction de résultats à partir des axiomes appelés des "règles d'inférence".

II. Langages et formules exprimées dans un langage

La seconde séance proposera une définition précise de la notion de langage d'une théorie mathématique et de celle de formule exprimable dans ce langage. Elle montrera comment les langages des théories les plus familières et leurs formules rentrent tous dans le cadre de cette double définition.

III. Axiomes et résultats d'une théorie : typologie des théories, règles d'inférence

La troisième séance proposera une définition générale de la notion de théorie mathématique définie par un langage et une famille d'axiomes. Cette définition permet de proposer une typologie des théories mathématiques à partir des formes générales de leur langage et de leurs axiomes. Par exemple, elle permet de préciser quelles théories peuvent être appelées algébriques. D'autre part, on dressera une liste complète des "règles d'inférence" qui permettent de déduire les résultats d'une théorie à partir de ses axiomes.

IV. Sémantique ensembliste : les modèles ensemblistes et leur structure de catégorie

La quatrième séance étudiera de manière générale la notion de modèle ensembliste d'une théorie, c'est-à-dire d'ensemble (ou de familles d'ensembles) muni du type de structure défini par cette théorie, et de morphisme de modèles, c'est-à-dire d'applications entre deux ensembles (ou familles d'ensembles) munis de telles structures qui respectent ces structures. On verra que la collection de tous les modèles ensemblistes d'une théorie et de leurs "morphismes" possède, quelle que soit la théorie considérée, une structure très riche commune à toutes, la structure de catégorie.

V. Sémantique catégorique : syntaxe et sémantique

La notion de catégorie étant apparue naturellement dans la quatrième séance, la cinquième montrera que l'on dispose d'une notion naturelle non pas seulement de modèle ensembliste d'une théorie donnée mais de modèle d'une telle théorie dans une catégorie. La distinction entre les théories définies formellement et leurs expressions sous forme de modèles dans des catégories correspond à la distinction entre les langues et ce qu'elles peuvent exprimer, entre grammaire et sens, entre syntaxe et sémantique.

VI. Retour sur la question des fondements des mathématiques

Dans une dernière séance, on verra dans quelle mesure le parcours d'analyse logique des mathématiques parcouru dans les séances précédentes a fait avancer ou a déplacé la question des fondements des mathématiques.