



ÉCOLE PROFESSORALE

D E P A R I S

CLASSE DE MATHÉMATIQUES PROGRAMME DE L'ANNEE 2022-2023

NB. Ce programme est donné à titre indicatif ; il pourra être modifié et complété d'ici septembre 2022

MODULE N°1 (15 heures) INTRODUCTION A LA LOGIQUE

par Laurent LAFFORGUE, Ancien élève de l'ENS Ulm, agrégé de mathématiques, Professeur à l'IHÉS, Médaille Fields.

Le but du cours est de préciser ce que l'on entend en mathématiques par le mot « théorie » et de proposer une analyse générale de cette notion. Cette analyse conduit à la distinction fondamentale entre la syntaxe et la sémantique d'une théorie, c'est-à-dire entre sa formulation logique et son contenu expressif. La première consiste en la donnée d'un langage et d'une famille d'axiomes, tandis que la seconde consiste en la collection de ses « modèles », c'est-à-dire de tous les objets mathématiques auxquels elle s'applique. Cette analyse conduit aussi à reconnaître ce que toutes les théories mathématiques ont en commun : d'une part les « règles d'inférence » par l'usage desquelles tous les résultats de n'importe quelle théorie se déduisent de ses axiomes, d'autre part, la très riche structure de catégorie dont sont naturellement munies les collections de modèles de toutes les théories. En conclusion, on verra dans quelle mesure le parcours d'analyse logique des mathématiques suivi dans le cours a fait avancer ou a déplacé la question de leurs fondements.

MODULE N°2 (15 heures) ÉQUATIONS POLYNOMIALES DE DEGRÉ DEUX ET TROIS : UNE BRÈVE HISTOIRE DE L'ALGÈBRE

par Mohamed HOUKARI, ancien élève de l'École polytechnique, agrégé de mathématiques, professeur de classes préparatoires.

Les équations polynomiales occupent une place importante dans l'histoire des mathématiques, et, dans ce cours, nous proposons, à travers les équations de degré deux et trois, de revenir sur certaines des avancées que leur étude a permises. Outre leur résolution exacte (méthodes de Cardano-Tartaglia pour les équations de degré trois) dans le cas d'équations à coefficients réels ou complexes, nous étudierons plusieurs méthodes de résolution approchée, graphiques et algorithmiques, montrant notamment l'apport des suites récurrentes dans ce

domaine. Dans un second temps, nous examinerons ce qui se produit lorsqu'on raisonne sur des équations à coefficients entiers ou rationnels, abordant par là quelques éléments de théorie des corps. Nous verrons que le procédé de construction des nombres à la règle et au compas (théorème de Wantzel) est particulièrement adapté pour illustrer la situation en degré deux, mais qu'il montre ses limites pour les équations du troisième degré (les problèmes de la trissection de l'angle et de la duplication du cube le montrent), sauf à y ajouter la possibilité de s'appuyer sur d'autres types de courbes ou d'outils géométriques.

Si le temps le permet, une petite partie du cours sera aussi consacrée à l'étude de ces équations dans les corps finis.

MODULE N°3 (15 heures)

LES ÉTAPES DU CALCUL DES PROBABILITÉS

par Christian HESS, agrégé de mathématiques, professeur émérite à l'université Paris-Dauphine

En suivant l'historique du calcul des probabilités à partir du XVII^e siècle, on abordera quelques thèmes saillants illustrés par des exemples, certains d'entre eux ayant été d'abord perçus comme paradoxaux ou contraires au sens commun, puis expliqués ensuite par une réflexion théorique plus précise. Parmi les thèmes abordés, citons les *jeux de hasard*, la *loi des grands nombres* qui permettra d'introduire la notion de convergence en probabilités pour une suite de variables aléatoires, la *genèse de la loi normale* (*alias* loi de Gauss ou de Laplace-Gauss), les résultats de convergence d'autres lois vers la loi normale d'où émerge la notion de *convergence* en loi.

D'autres résultats plus récents et plus fins sur le comportement asymptotique des suites de variables aléatoires seront brièvement présentés, tels que l'inégalité de Berry-Essen, la loi du logarithme itéré et celle de l'arc sinus. Si le temps le permet, on évoquera les premiers principes de la théorie de la mesure, théorie qui a permis d'aboutir à une forme générale du modèle probabiliste.

[

MODULE N°4 (15 heures)

ENSEIGNER LA THEORIE DES GRAPHES

par Benoît RITTAUD, ancien élève de l'ENS Lyon, agrégé de mathématiques, Maître de Conférences à l'université Paris XIII

Le cours traitera de divers développements de la théorie des graphes qui prolongent les programmes d'enseignement de spécialité du lycée. Il s'attachera plus spécialement à montrer comment ces objets sont liés à diverses branches des mathématiques, théoriques comme appliquées : algorithmique, algèbre linéaire, théorie des langages, théorie des jeux.